# 第二章 控制系统的数学模型

# 数学模型

- 控制系统的数学模型是描述系统内部各物理量（或变量）之间关系的数学表达式或图形表达式或数字表达式。
- 控制系统的数学模型按系统运动特性分为：静态数学模型和动态数学模型。（静态模型是$t\rightarrow\infty$时系统的动态模型。）
- 建立控制系统数学模型的方法：分析法和实验法。

# 2-1 微分方程与传递函数

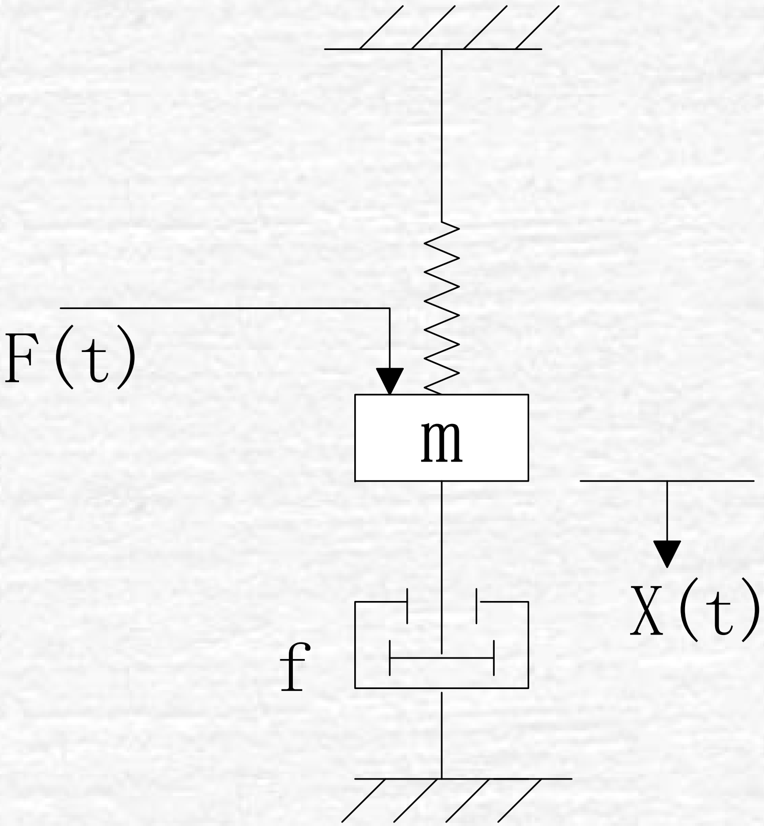
- 根据系统物理机理建立系统微分方程模型的基本步骤：
（1）确定系统中各元件的输入输出物理量；
（2）根据物理定律或化学定律（机理），列出元件的原始方程，在条件允许的情况下忽略次要因素，适当简化；
（3）列出原始方程中中间变量与其他因素的关系；
（4）消去中间变量，按模型要求整理出最后形式。

例1 机械力学系统

弹簧阻尼系统：

其中：*f* 是阻尼系数

*k* 是弹簧系数



解：系统的微分方程如下

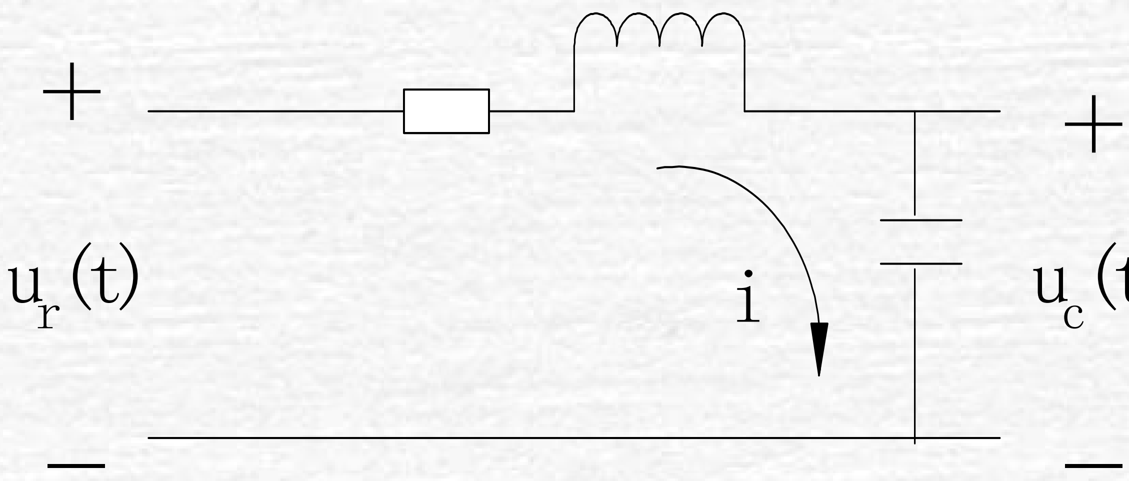
$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}+f\frac{dX(t)}{dt}+kX(t)=F(t)$$

拉氏变换后（零初始条件下）：

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+fs+k}$$

例2 电学系统：

其中：电阻为$R$，电感为$L$，电容为$C$。



解：系统的微分方程如下

$$LC\frac{d^2U_c(t)}{dt^2}+RC\frac{dU_c(t)}{dt}+U_c(t)=U_r(t)$$

拉氏变换后（零初始条件下）

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

# 传递函数

- 定义：

线性定常系统的传递函数，定义为零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

三要素：线性定常系统

零初始条件

输出与输入的拉氏变换之比

零初始条件：

输入及其各阶导数在t =0- 时刻均为0；

输出及其各阶导数在t =0- 时刻均为0。

形式上记为：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

## 传递函数的性质:

（1）传递函数只取决于系统或元件的结构和参数，与输入输出无关;

（2）传递函数概念仅适用于线性定常系统，具有复变函数的所有性质;

（3）传递函数是复变量 $s$ 的有理真分式，即 $n \geqslant m$;

（4）传递函数是系统冲激响应的拉氏变换;

（5）传递函数与真正的物理系统不存在一一对应关系；

（6）由于传递函数的分子多项式和分母多项式的系数均为实数，故零点和极点可以是实数，也可以是成对的共轭复数。

$$G(s)=\frac{K_G(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

其中：$K_G$—根轨迹增益或传递系数；

$z_i$—零点（$i$=1,…,m）；

$p_j$—极点（j=1,…,n）。

传递函数列写大致步骤:

方法一：列写系统的微分方程

消去中间变量

在零初始条件下取拉氏变换

求输出与输入拉氏变换之比

方法二：列写系统中各元件的微分方程

在零初始条件下求拉氏变换

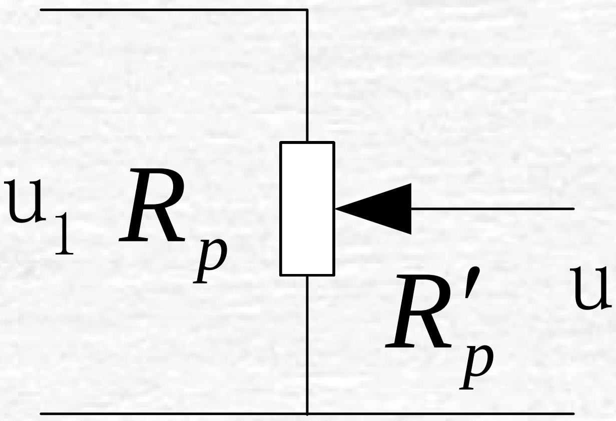
整理拉氏变换后的方程组，消去中间变量

整理成传递函数的形式

- 电位器：把线位移或角位移变换为电压量的装置。

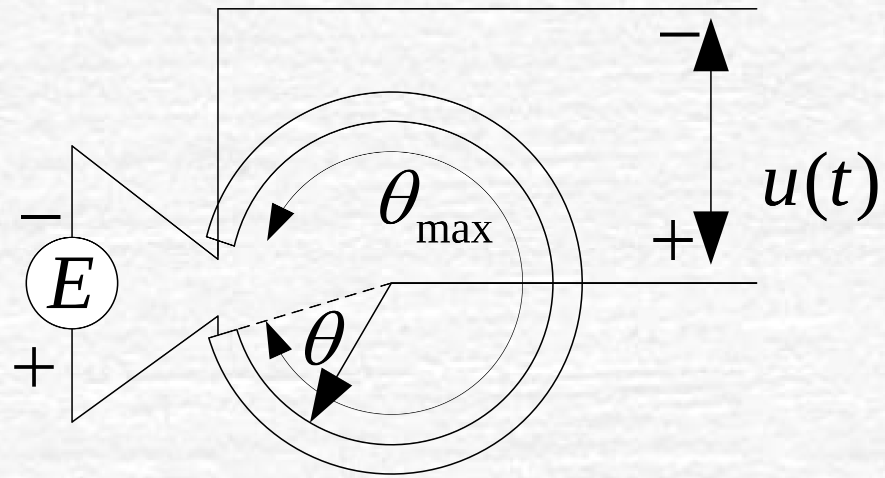
（1）线位移：

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{R'_p}{R_p}$$




$$G(s)=\frac{R'_p}{R_p}=K_p$$

（2）角位移：

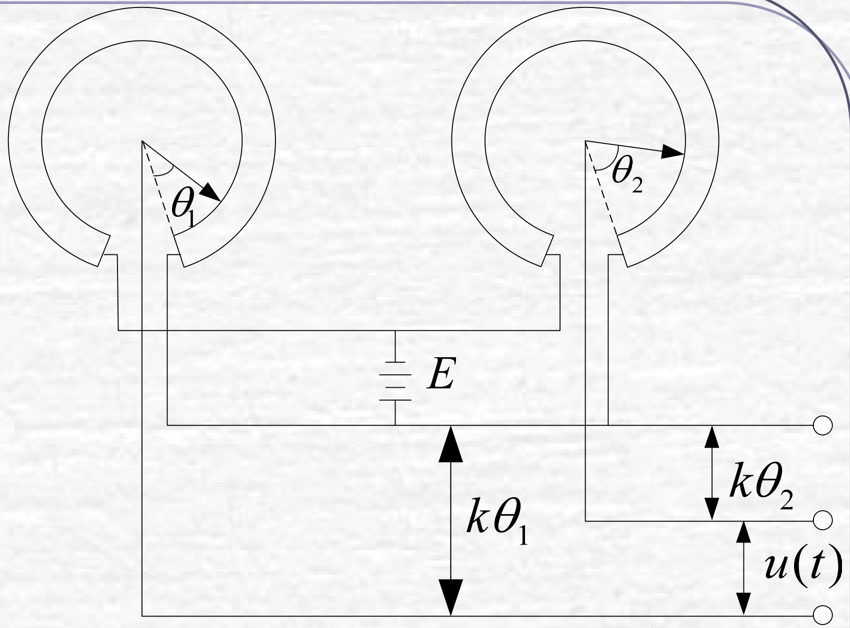



$$G(s)=\frac{U(s)}{\Theta(s)}=\frac{E}{\theta_{max}}=K_p$$

其中：E—电位器电源电压；

$\theta_{max}$—电位器最大工作角。

一对与上面相同的电位器可以组成误差检测器




$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) = K_p(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$

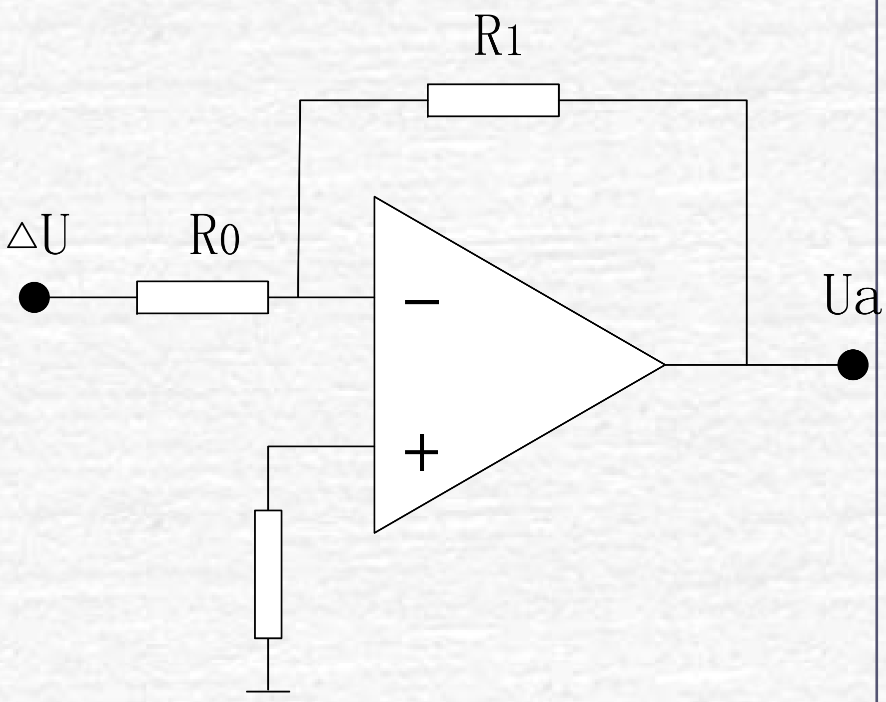
$$= K_p \Delta\theta(t)$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{\Delta\Theta(s)} = K_p$$

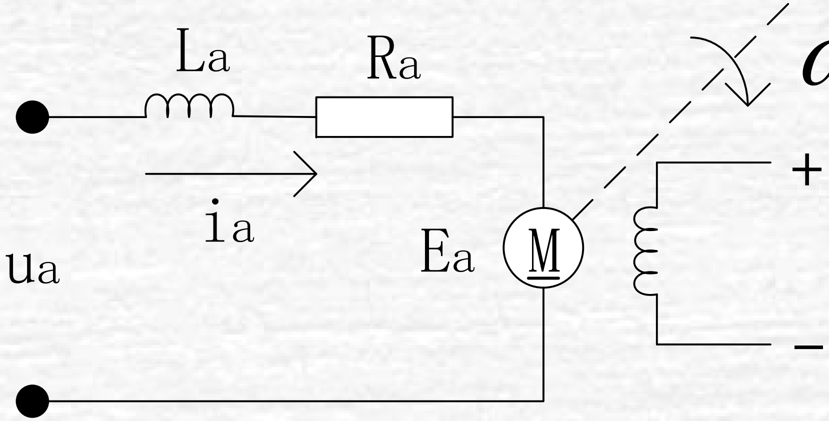
## 放大器：

$$G(s) = -\frac{R_1}{R_0} = K_a$$

$$U_a(s) = K_a \cdot \Delta U(s)$$



直流电动机：




$$\omega_m(\theta_m)$$

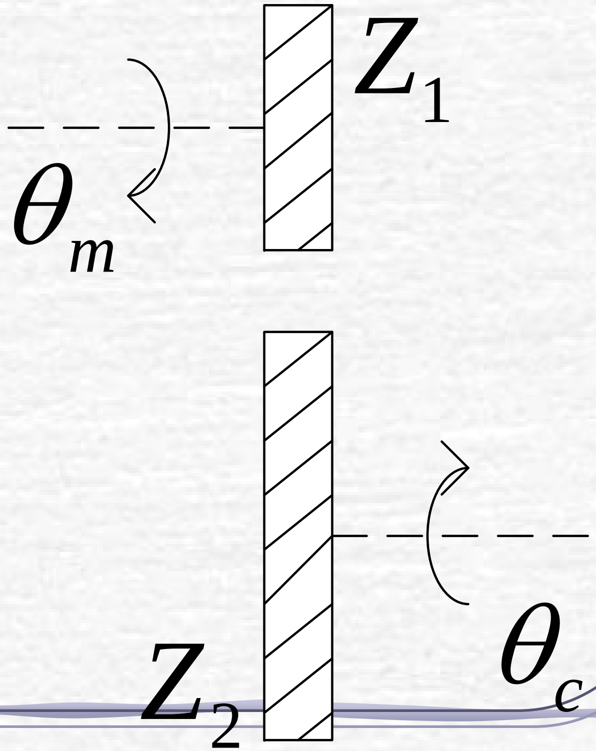
$$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$

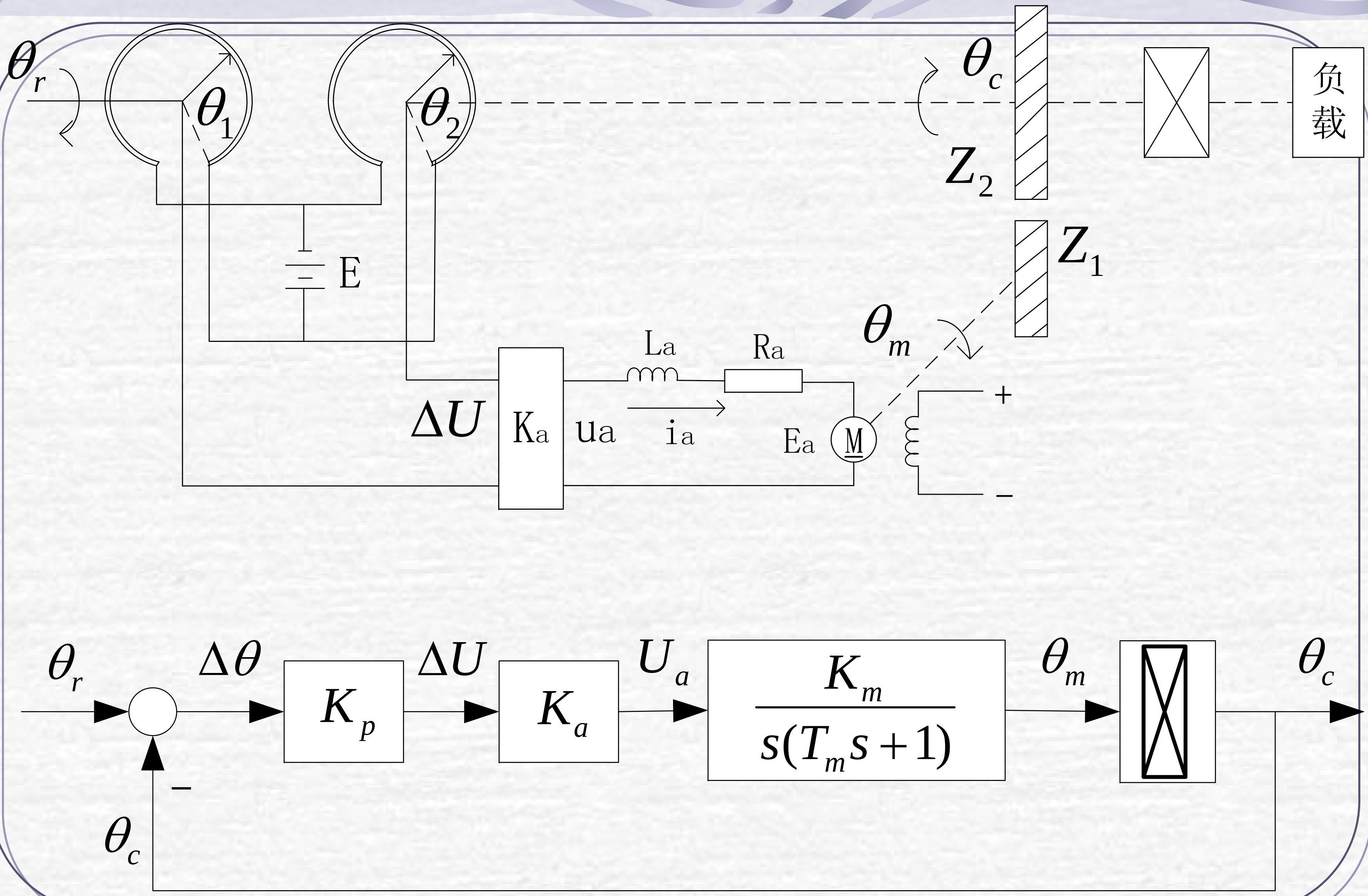
$$T_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{d\theta_m}{dt} = K_m u_a$$

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

- 减速器：




$$\frac{\Theta_c(s)}{\Theta_m(s)} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{i}$$

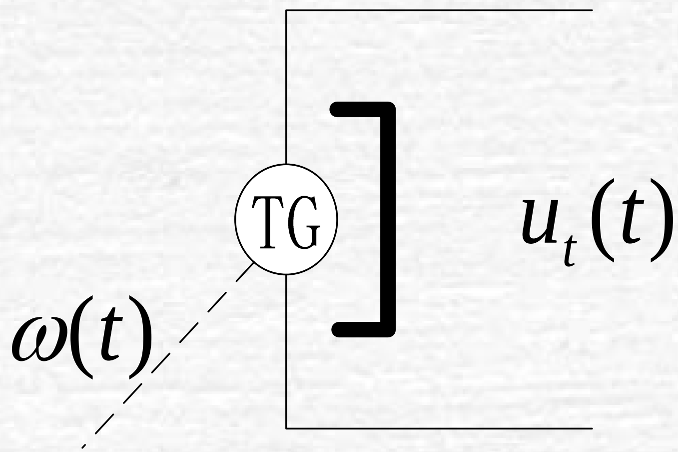

θr
θ1
θ2
θc
Z2
Z1
负载
E
θm
La
Ra
ΔU
Ka
ua
ia
Ea
M
+
–
θr
Δθ
Kp
ΔU
Ka
Ua
Km / s(Tm s+1)
θm
θc
–
θc

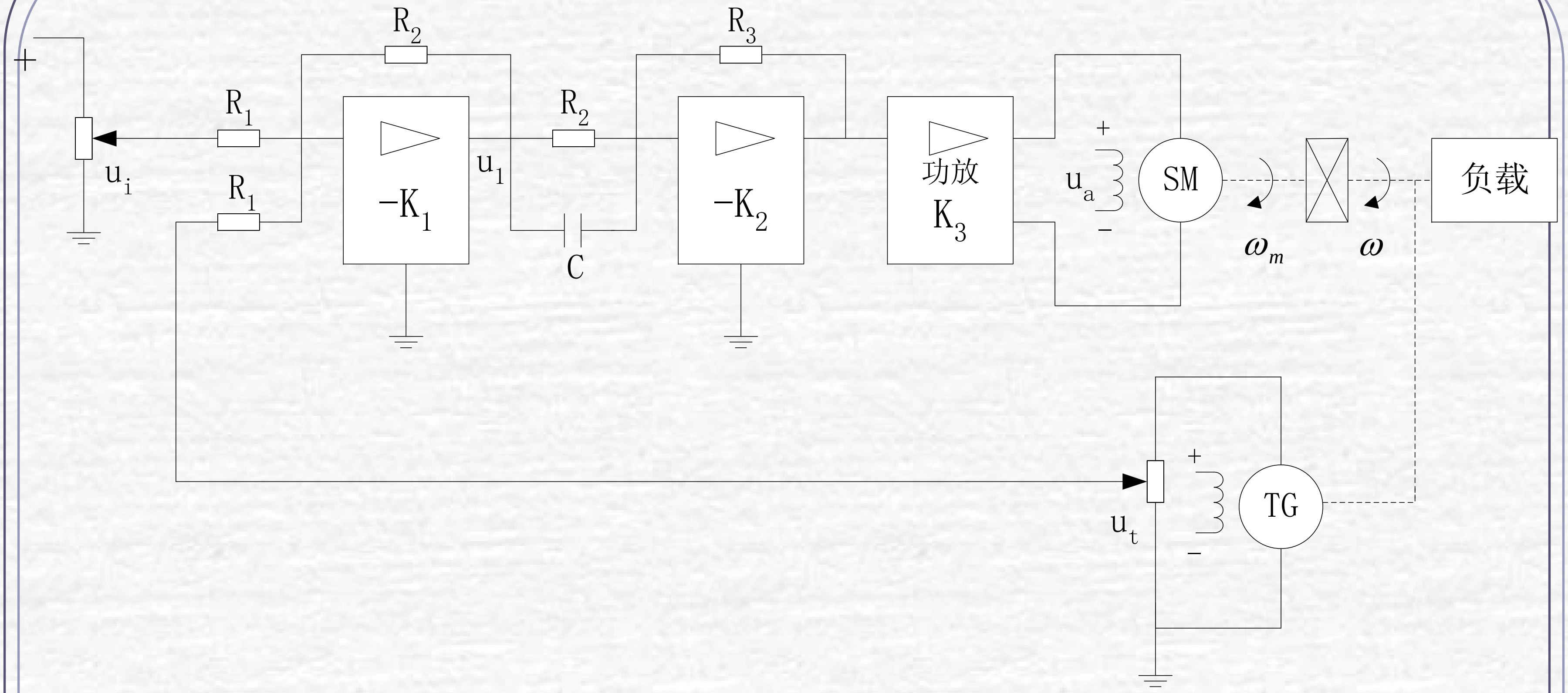
测速发电机：

$$u_t(t) = K_t \omega(t) = K_t \frac{d\theta(t)}{dt}$$

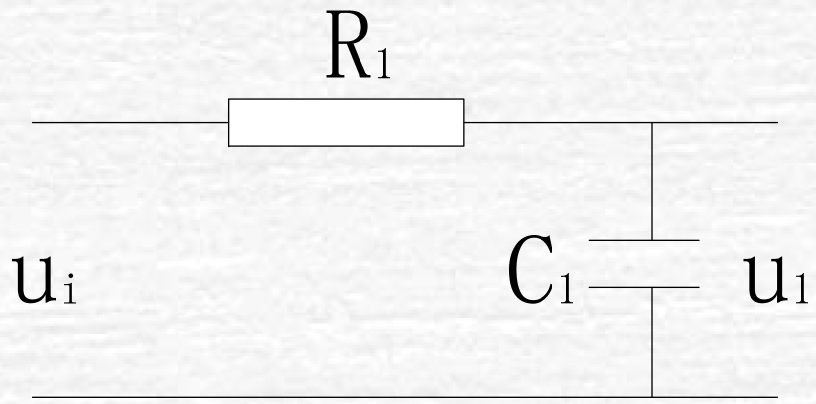
$$\frac{U_t(s)}{\Omega(s)} = K_t$$

$$\frac{U_t(s)}{\Theta(s)} = K_t s$$

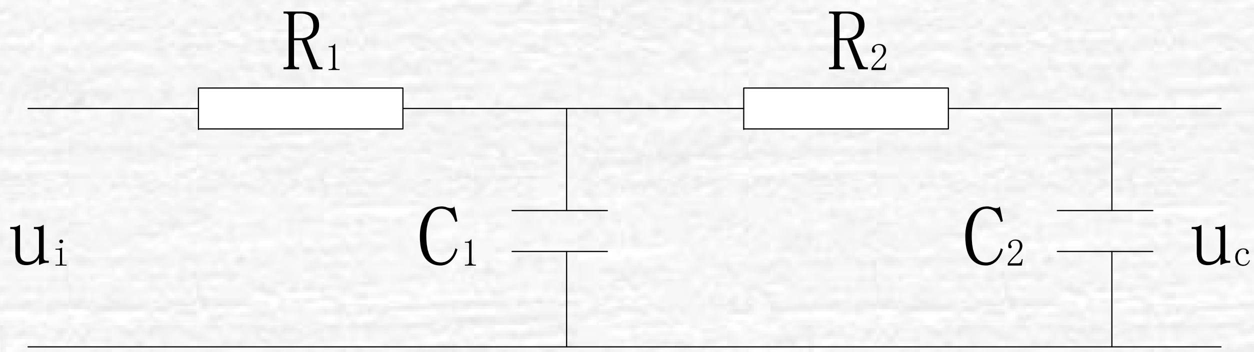



+
R2
R3
R1
R2
ui
R1
u1
-K1
-K2
功放
K3
+
ua
−
SM
ωm
ω
负载
C
+
ut
−
TG

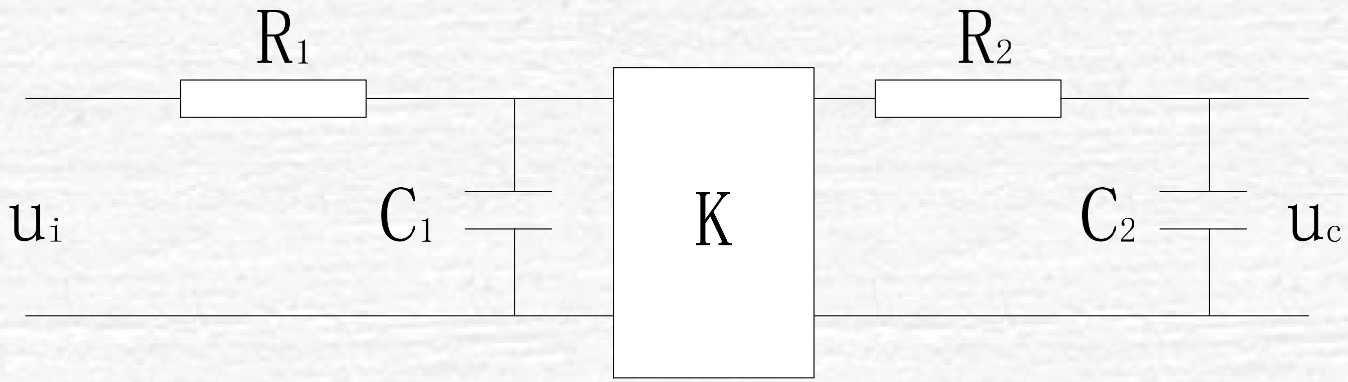
无源网络：




$$\frac{U_1(s)}{U_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{sC_1}}{R_1 + \dfrac{1}{sC_1}} = \frac{1}{R_1C_1s+1}$$

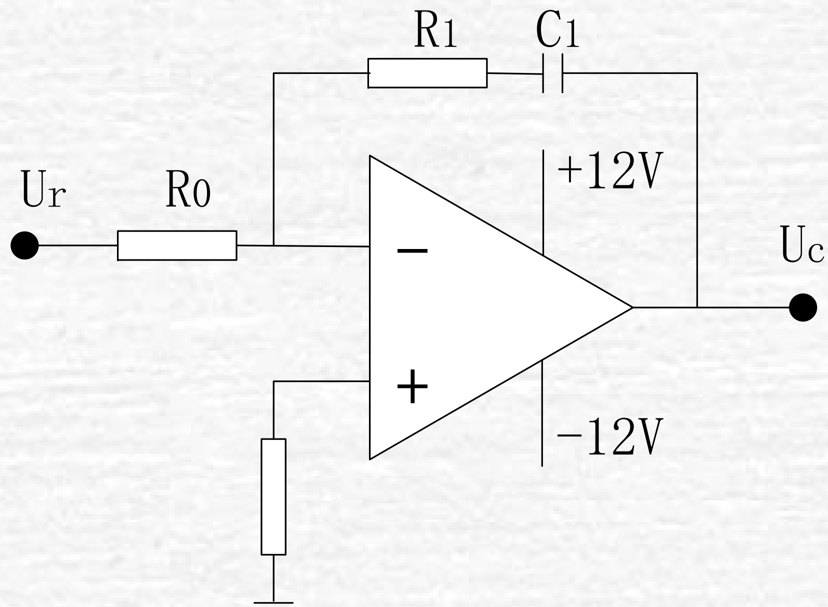



$$\frac{U_c(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2S^2 + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)s + 1}$$




$$\frac{U_c(s)}{U_i(s)} = \frac{K}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$

有源网络：




$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{R_1C_1s+1}{R_0C_1s}$$

# 2-3 典型环节及其传递函数

- 环节：具有某种确定信息传递关系的元件、元件组或元件的一部分称为一个环节。
- 系统传递函数可写为：

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1`}^{b}(\tau_i s+1)\prod_{j=1}^{c}(\tau_j^2 s^2+2\xi_j\tau_j s+1)}{s^v\prod_{l=1`}^{d}(T_l s+1)\prod_{k=1}^{e}(T_k^2 s^2+2\xi_k T_k s+1)}$$

由上式可知，传递函数表达式包含六种不同的因子：

$$K, \tau s+1, \tau^2 s^2+2\xi\tau s+1$$

$$\frac{1}{s}, \frac{1}{Ts+1}, \frac{1}{T^2 s^2+2\xi Ts+1}$$

各典型环节名称：

- 比例环节：$K$
- 一阶微分环节：$\tau s+1$
- 二阶微分环节：$\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1$
- 积分环节：$\dfrac{1}{s}$
- 惯性环节：$\dfrac{1}{Ts+1}$
- 二阶振荡环节：$\dfrac{1}{T^2 s^2+2\xi Ts+1}$

- 延迟环节： $e^{-\tau s}$

- 惯性环节与延迟环节的区别：

惯性环节从输入开始时刻就已有输出，仅由于惯性，输出要滞后一段时间才接近所要求的输出值；

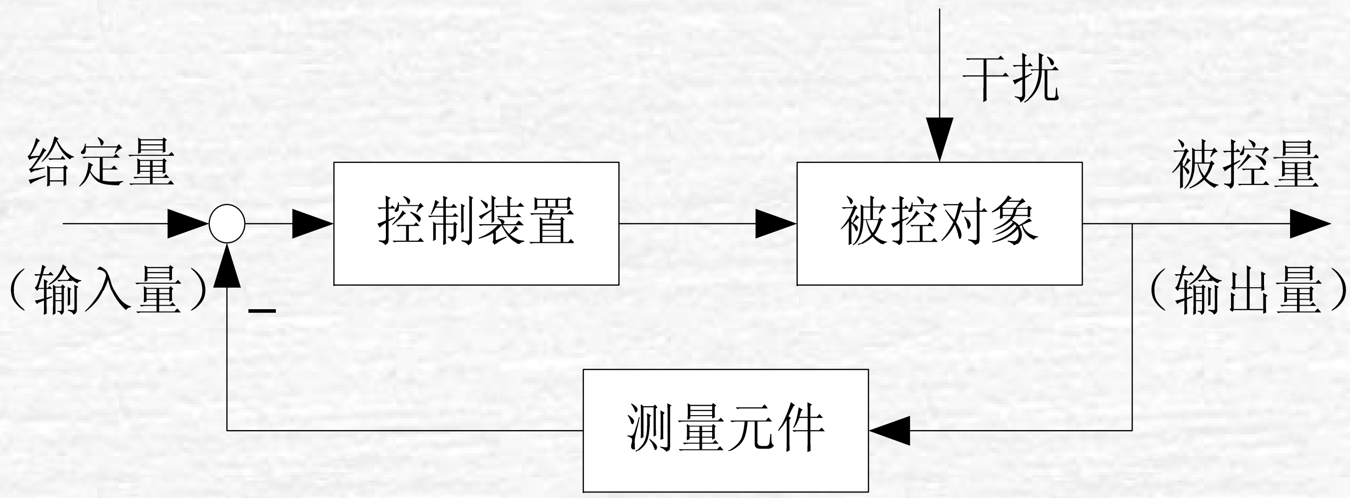
延迟环节从输入开始后在0～τ时间内没有输出，但$t$ = τ之后，输出完全等于输入。

# 2-4 控制系统的结构图与信号流图

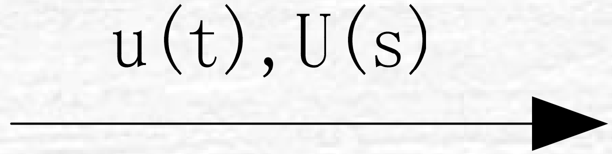
控制系统的结构图与信号流图是系统数学模型的图解形式，可以形象直观地描述系统中各元件间的相互关系及其功能以及信号在系统中的传递、变换过程。

# 一、系统结构图的组成

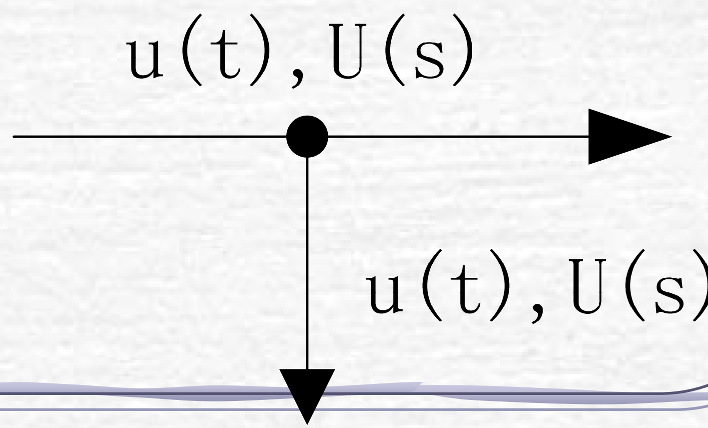
- 特点：具有图示模型的直观，又有数学模型的精确。



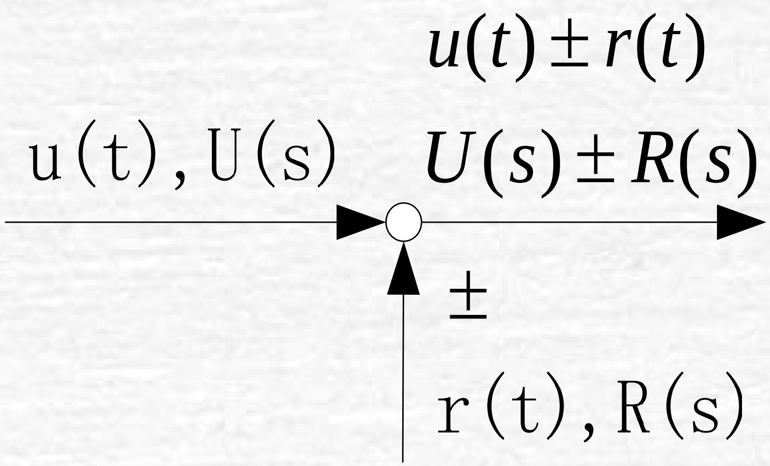
1、信号线：带有箭头的直线，箭头表示信号的流向，在直线旁标记信号的时间函数或象函数。



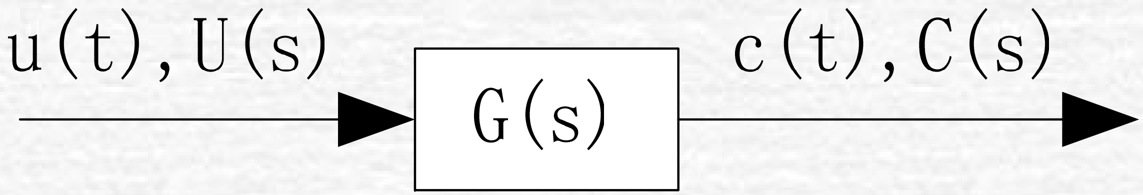

2、引出点（或测量点）：表示信号引出或测量的位置，从同一位置引出的信号在数值和性质方面完全相同。



3、比较点（综合点、相加点）：表示两个以上的信号进行加减运算。



4、方框（或环节）：表示对信号进行的数学变换，方框中写入元部件或系统的传递函数。




方框与实际系统中的元部件并非一一对应。

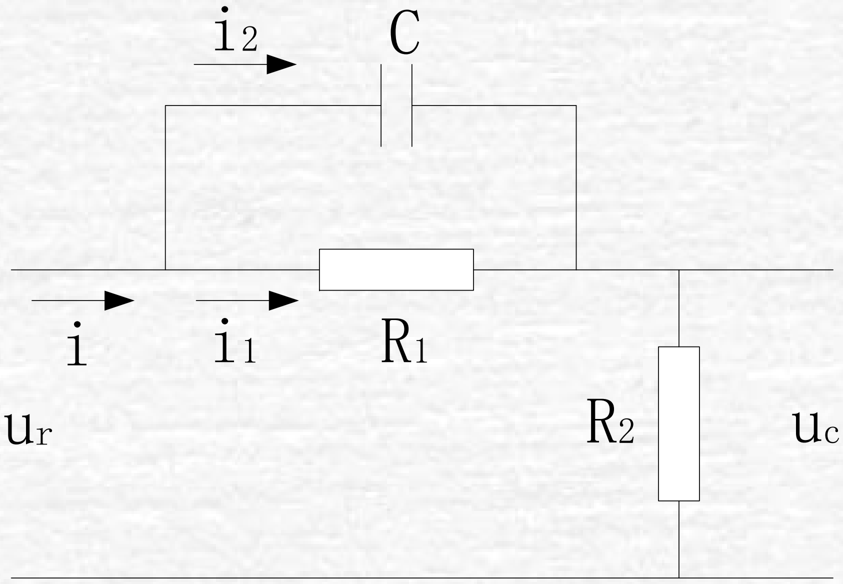
# 二、结构图的建立

- 建立步骤：

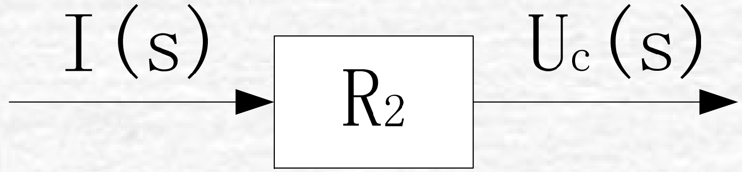
  1）列出各环节（元件）的传递函数；

  2）根据各环节之间的信号流向，用图的形式连接起来 。

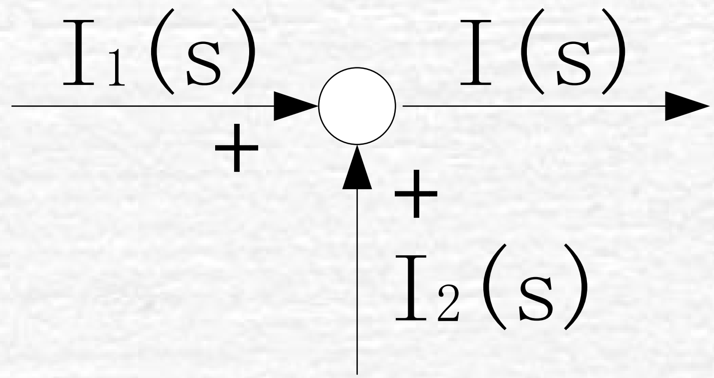
例1 无源网络：



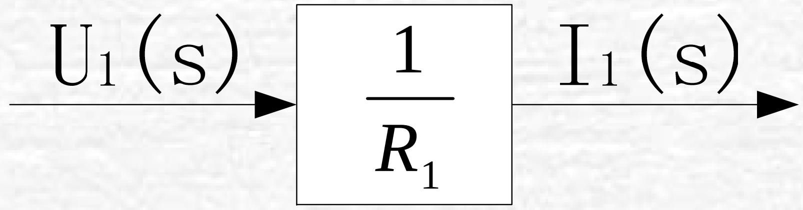
$$U_c(s) = I(s)R_2$$



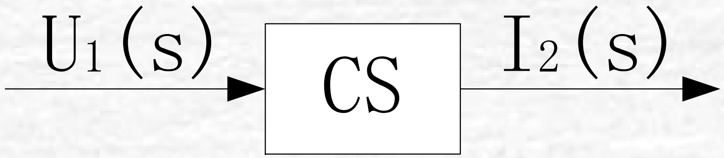

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$



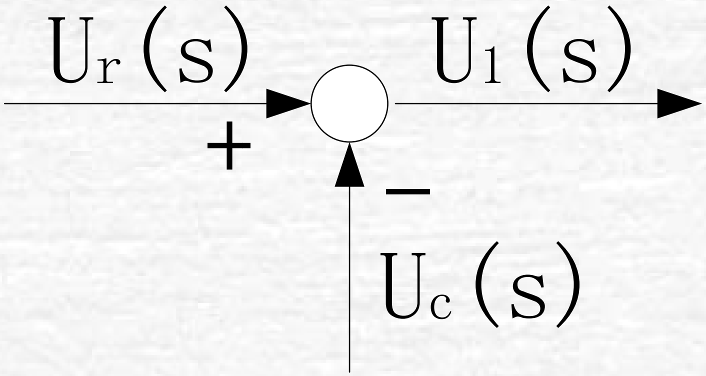

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{R_1}$$



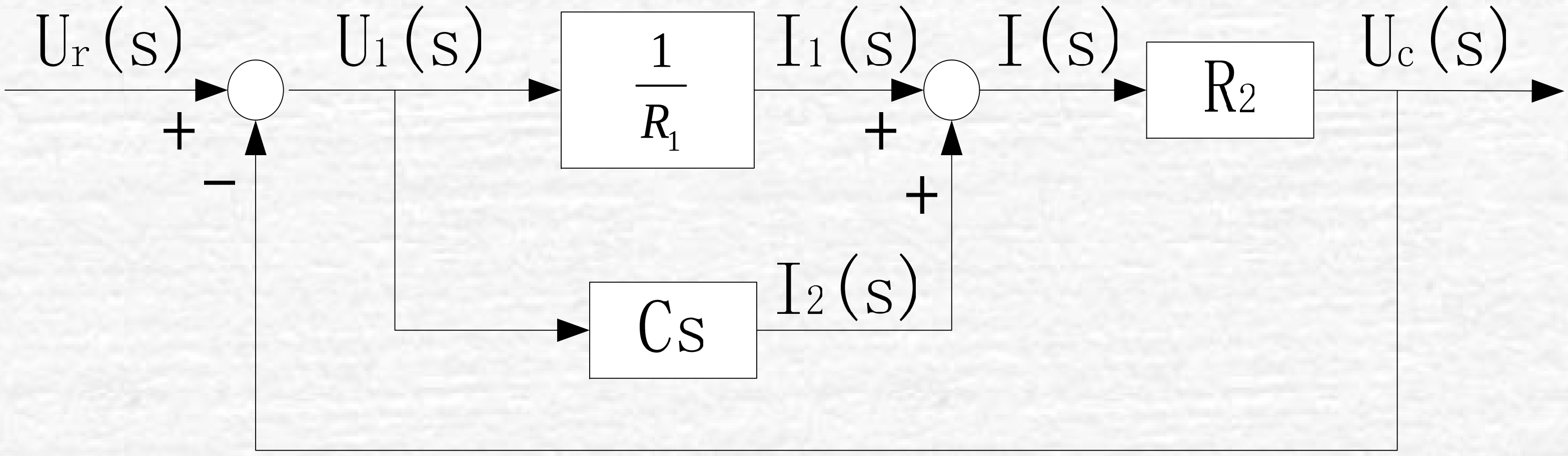
$$I_2(s) = U_1(s)Cs$$



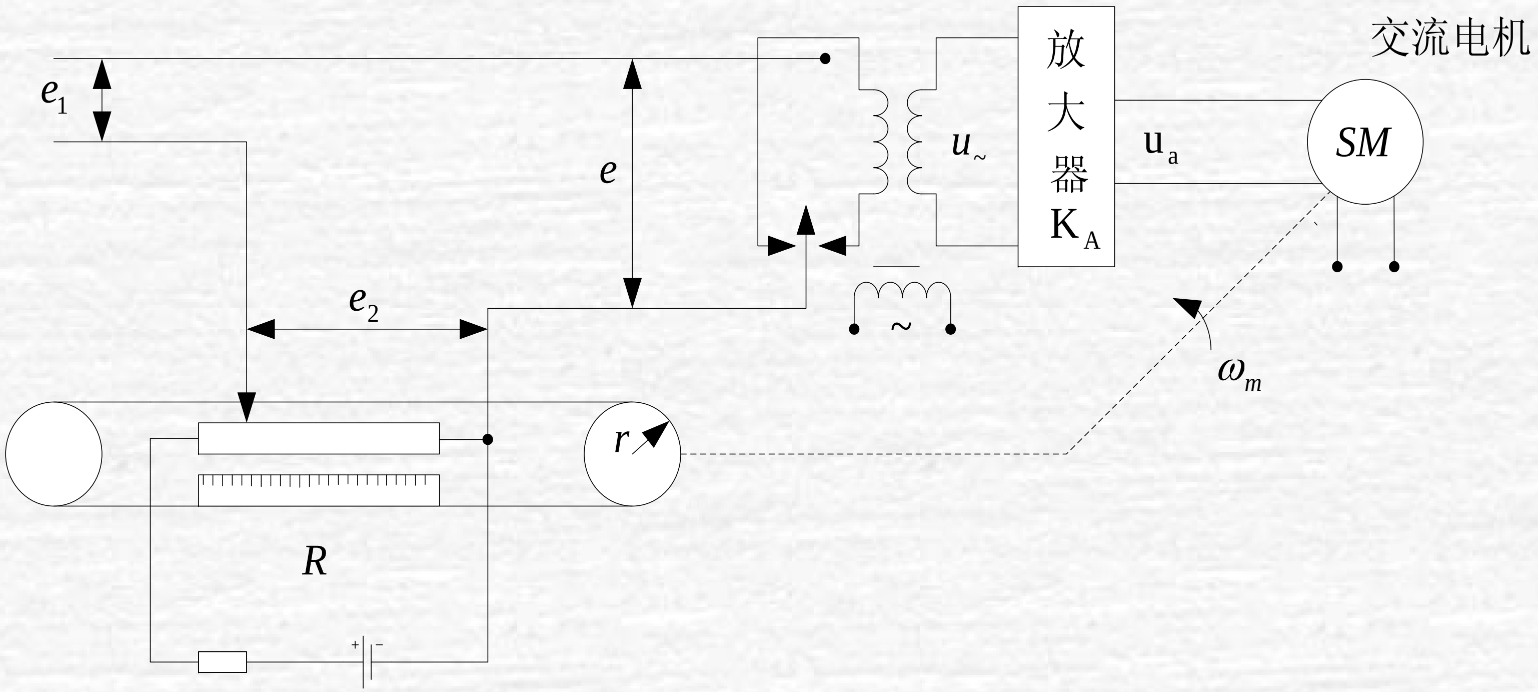

$$U_1(s) = U_r(s) - U_c(s)$$



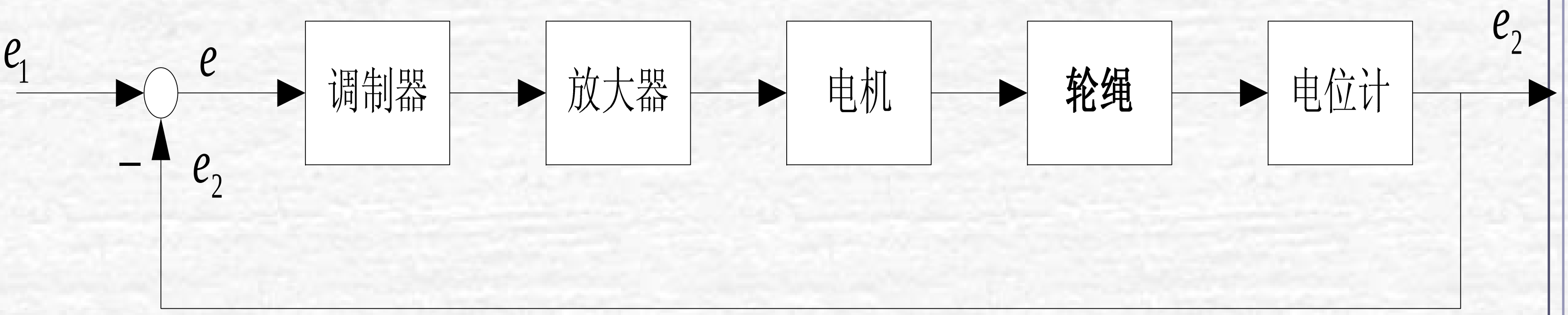
将上面的各环节（元件）的部分综合有：



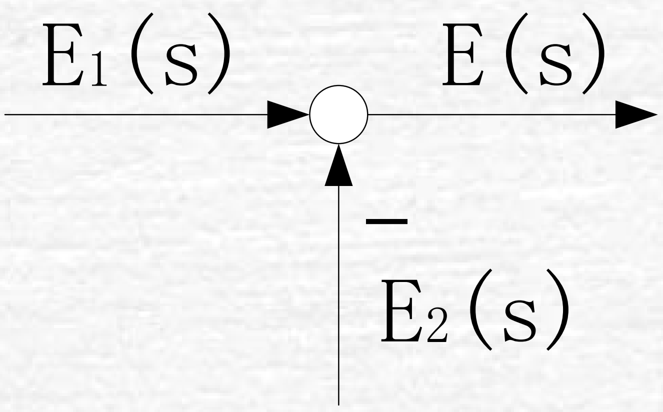
# 例2 电压测量装置：



原理方框图：



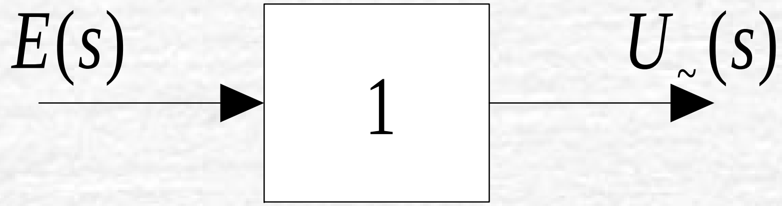

比较电路：




$$E(s)=E_1(s)-E_2(s)$$

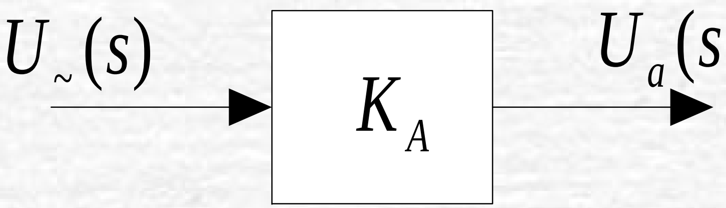
调制器：

$$U_{\sim}(s) = E(s)$$

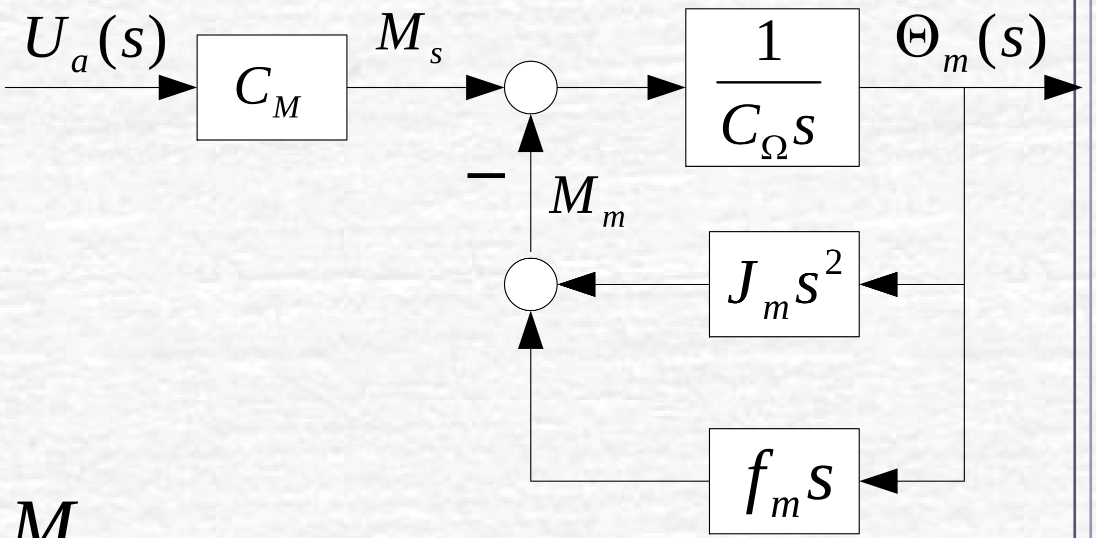



放大器：

$$U_a(s) = K_A U_{\sim}(s)$$



两相伺服电机：



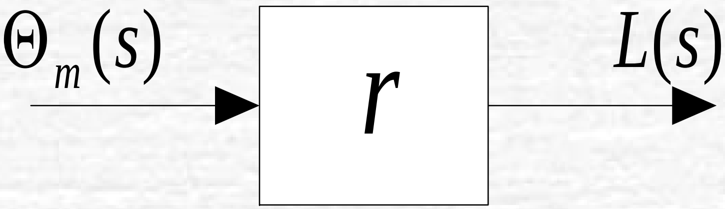

$$M_m = -C_\Omega s\Theta_m(s) + M_s$$

$$M_s = C_M U_a(s)$$

$$M_m = J_m s^2\Theta_m(s) + f_m s\Theta_m(s)$$

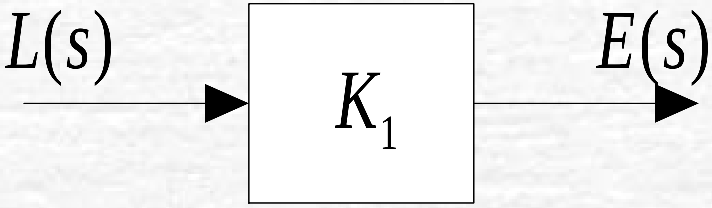
绳轮传递：

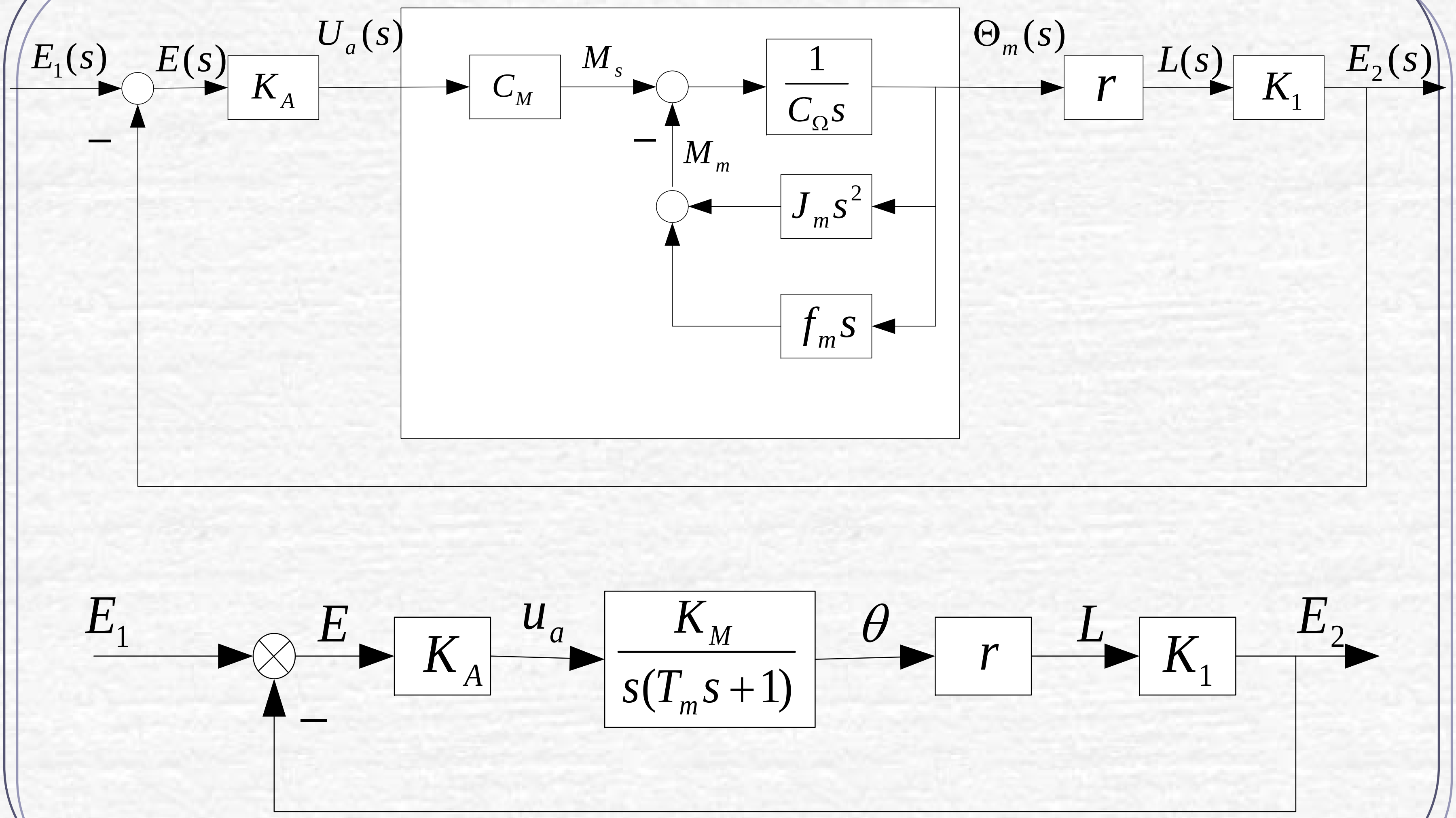
$$L(s) = r\Theta_m(s)$$




测量电位计：

$$E_2(s) = K_1 L(s)$$



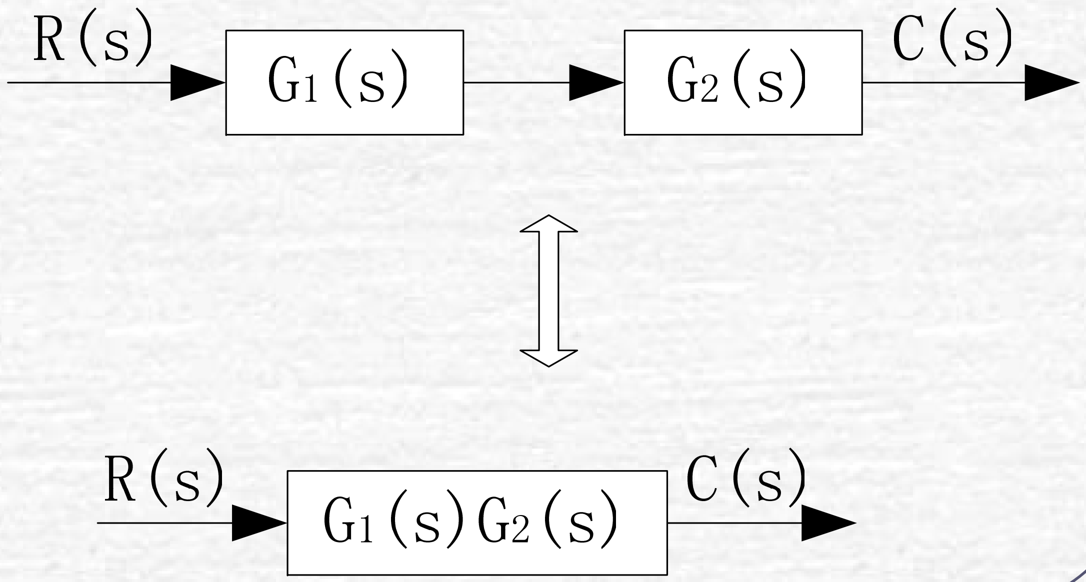


$E_1(s)$
$E(s)$
$K_A$
$U_a(s)$
$C_M$
$M_s$
$\frac{1}{C_\Omega s}$
$M_m$
$J_m s^2$
$f_m s$
$\Theta_m(s)$
$r$
$L(s)$
$K_1$
$E_2(s)$
$E_1$
$E$
$K_A$
$u_a$
$\frac{K_M}{s(T_m s+1)}$
$\theta$
$r$
$L$
$K_1$
$E_2$

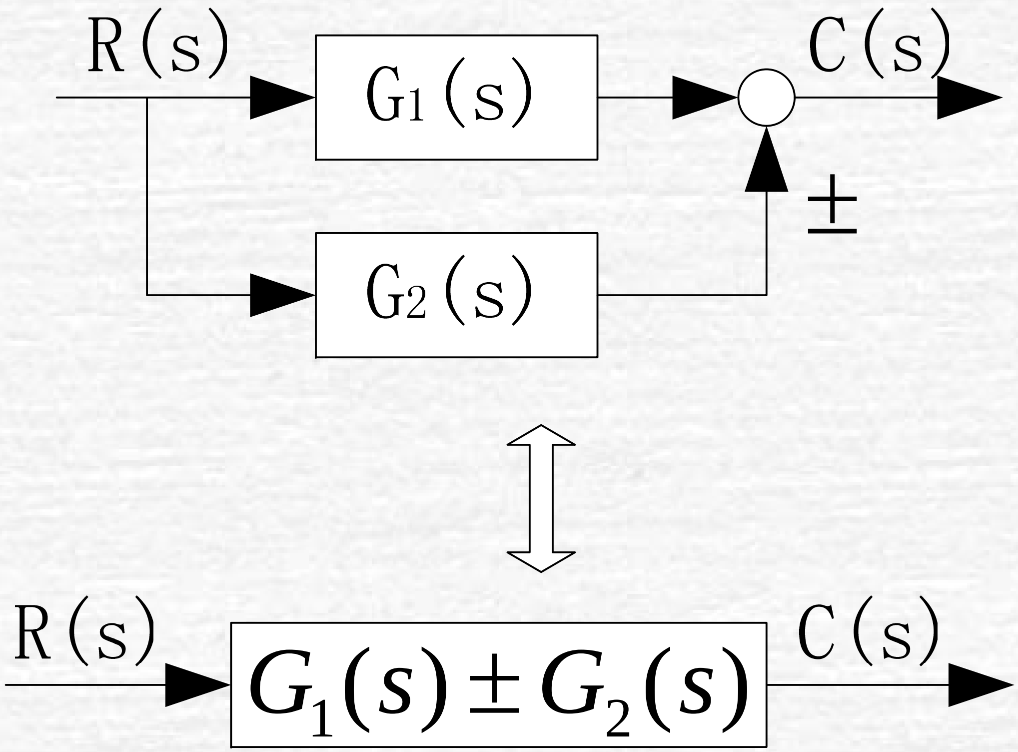
## 三、 结构图的等效变换和简化

- 方框图的基本连接方法只有三种：串联、并联、反馈。
- 简化原则：变换前后变量关系保持等效。

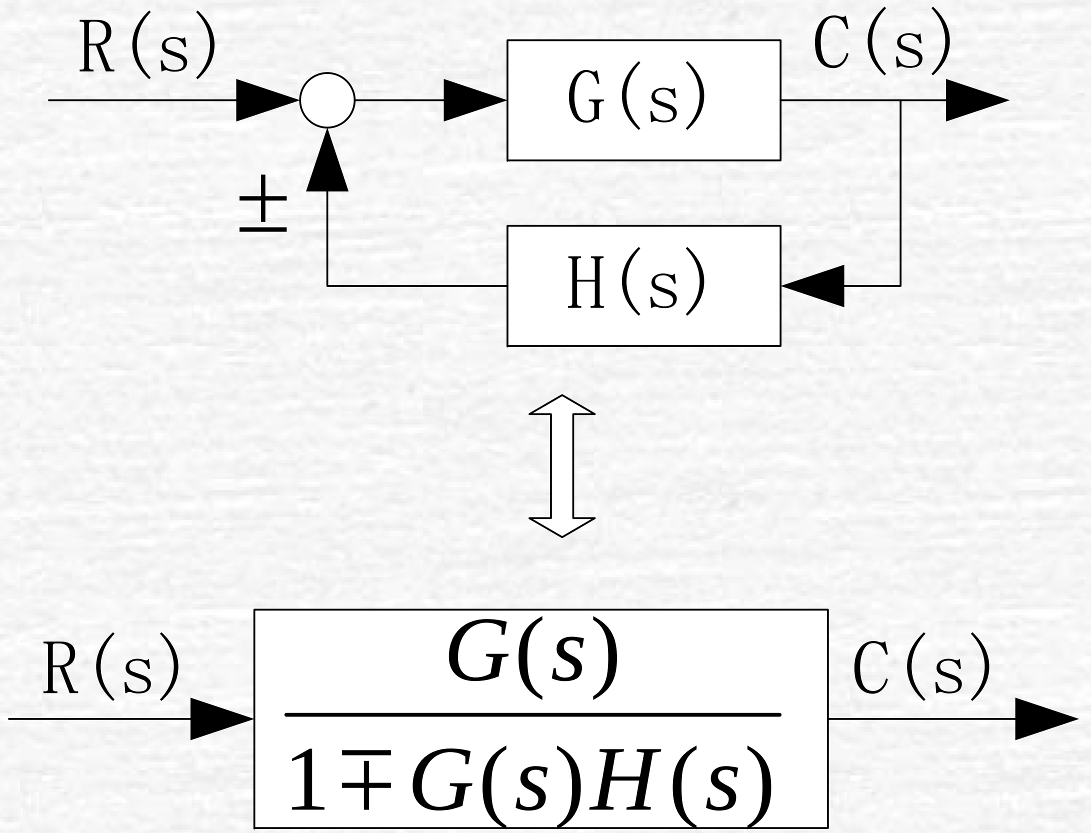
（1）串联连接：



（2）并联连接：

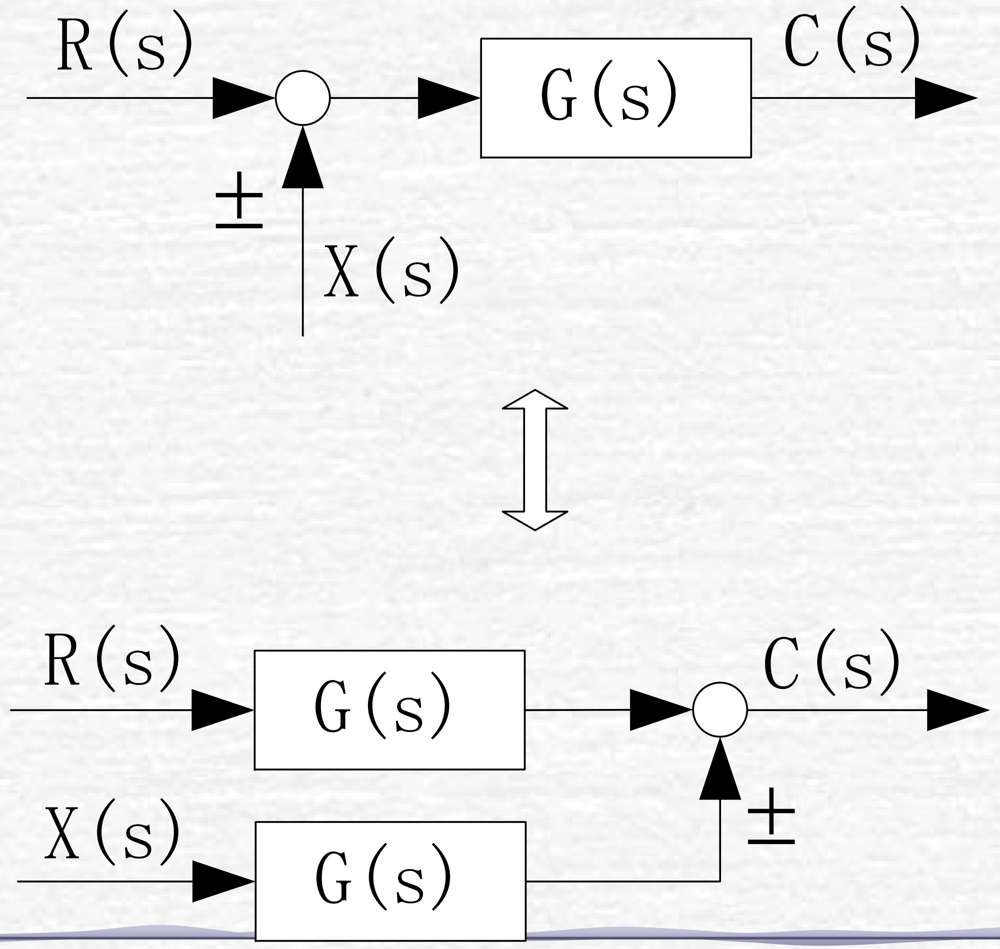


（3）反馈连接：

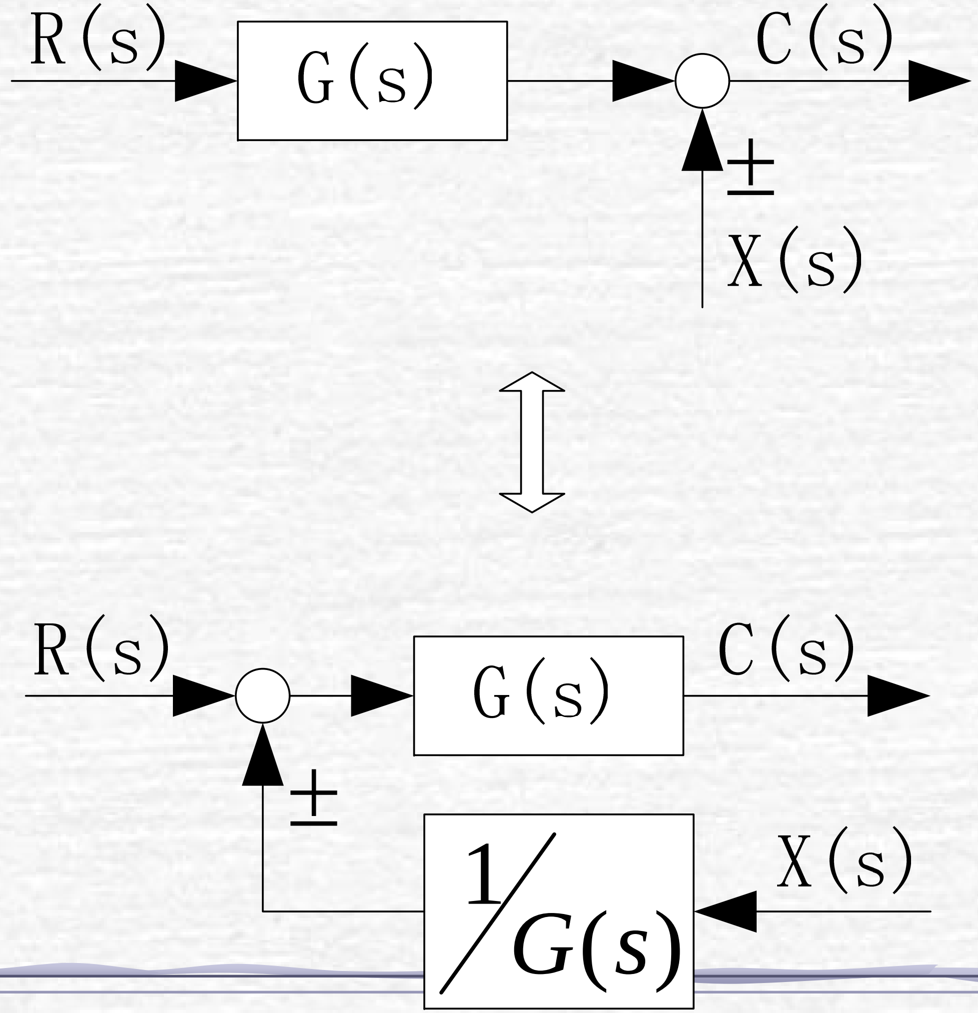



$$\frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

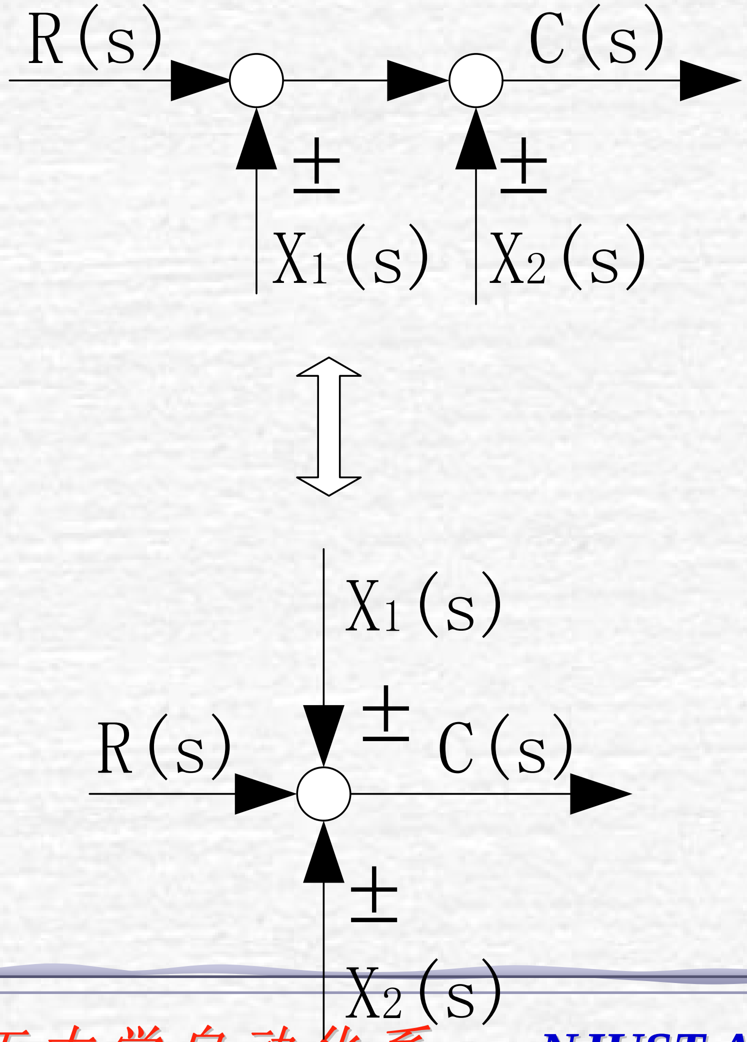
（4）比较点后移：



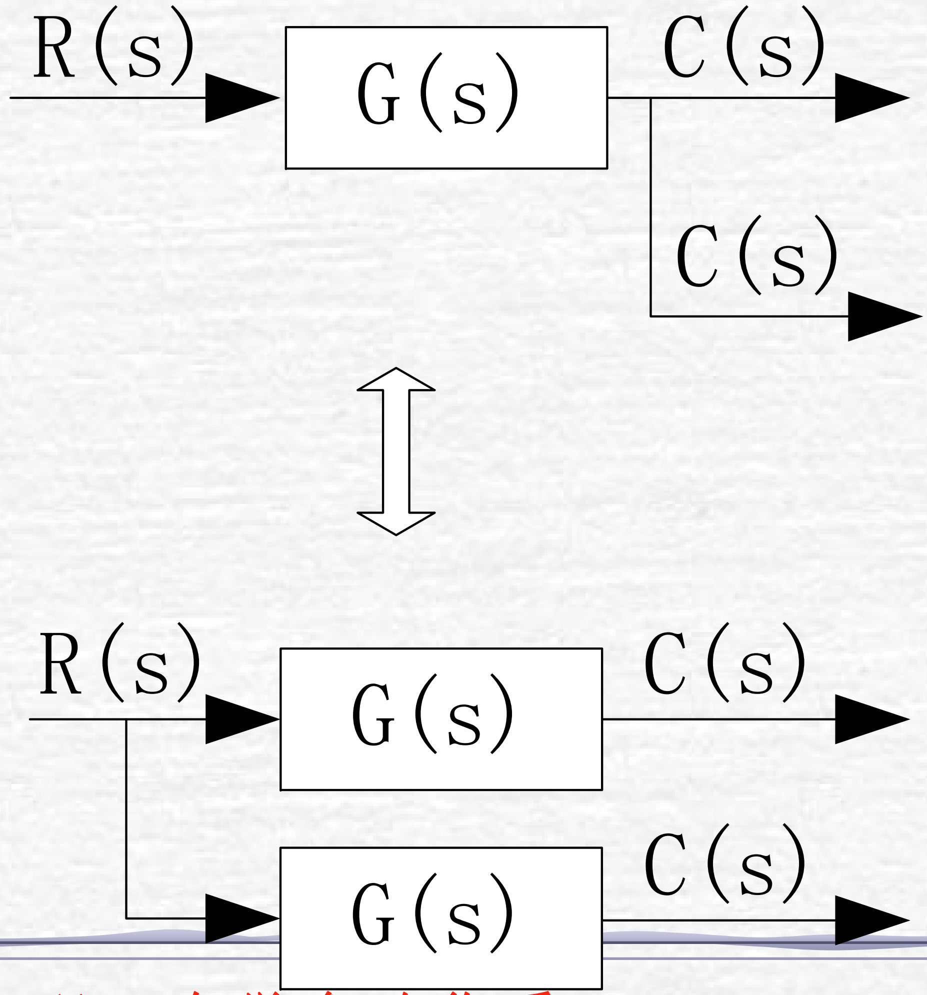
（5）比较点前移：



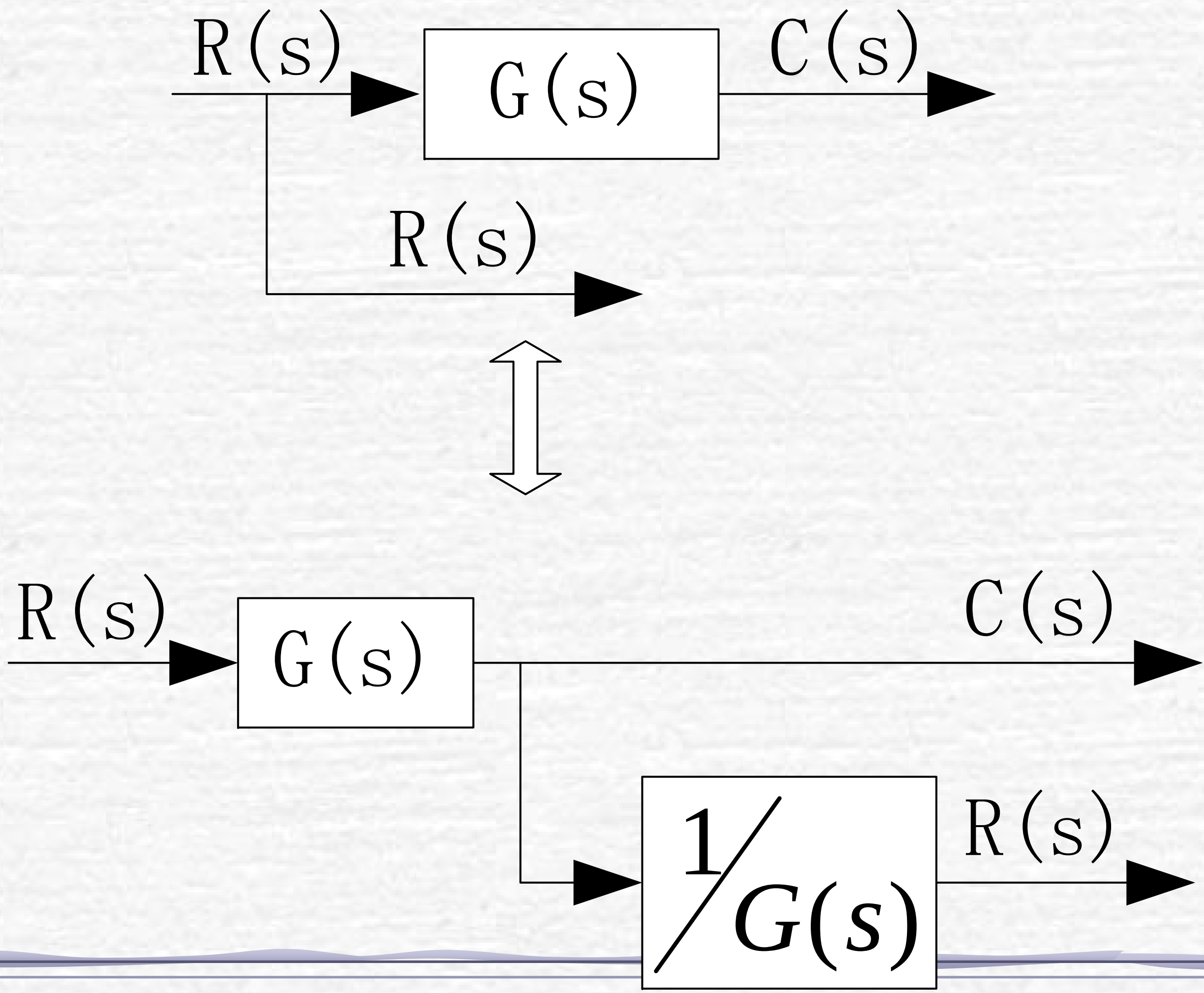
（6）比较点合并：



（7）引出点前移：



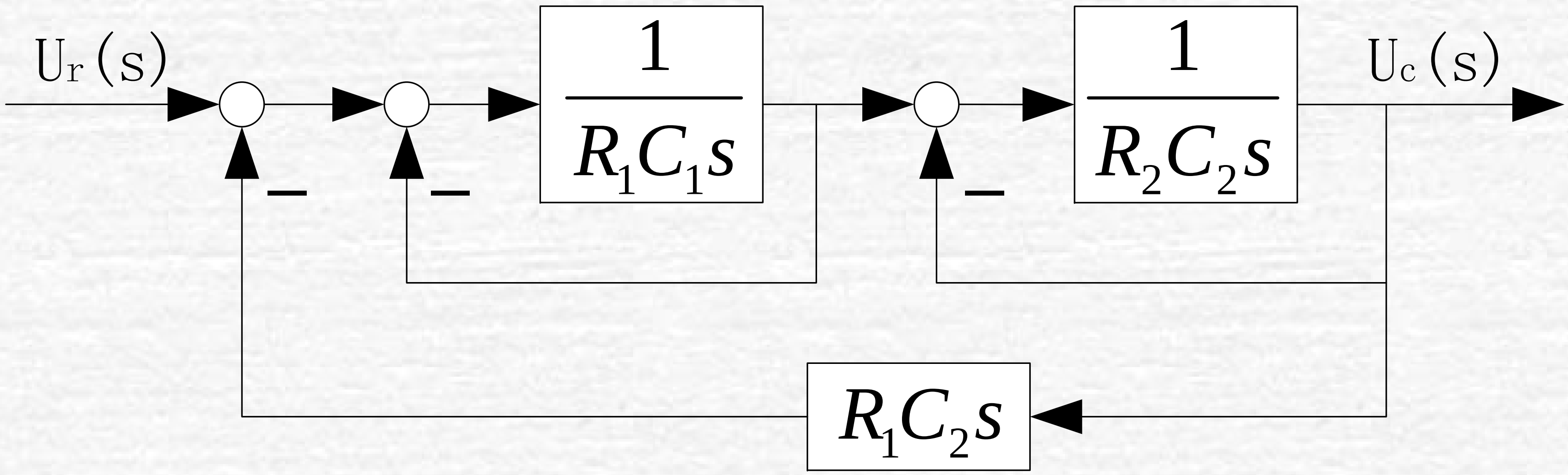
（8）引出点后移：



- 注意：比较点和引出点之间一般不宜交换其位置。

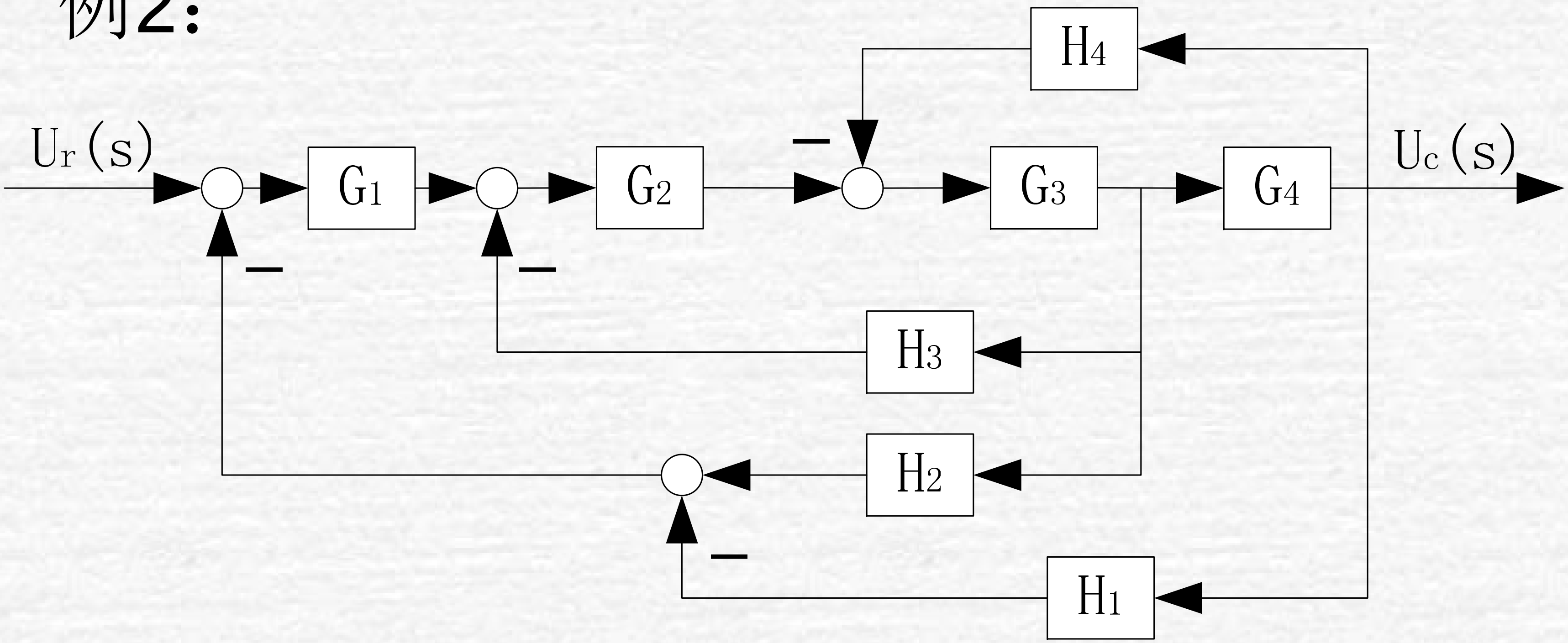
- 由方框图求系统传递函数的基本思路：利用等效变换法则，移动比较点和引出点，消去交叉回路，变换成可以运算的简单回路。

例1：



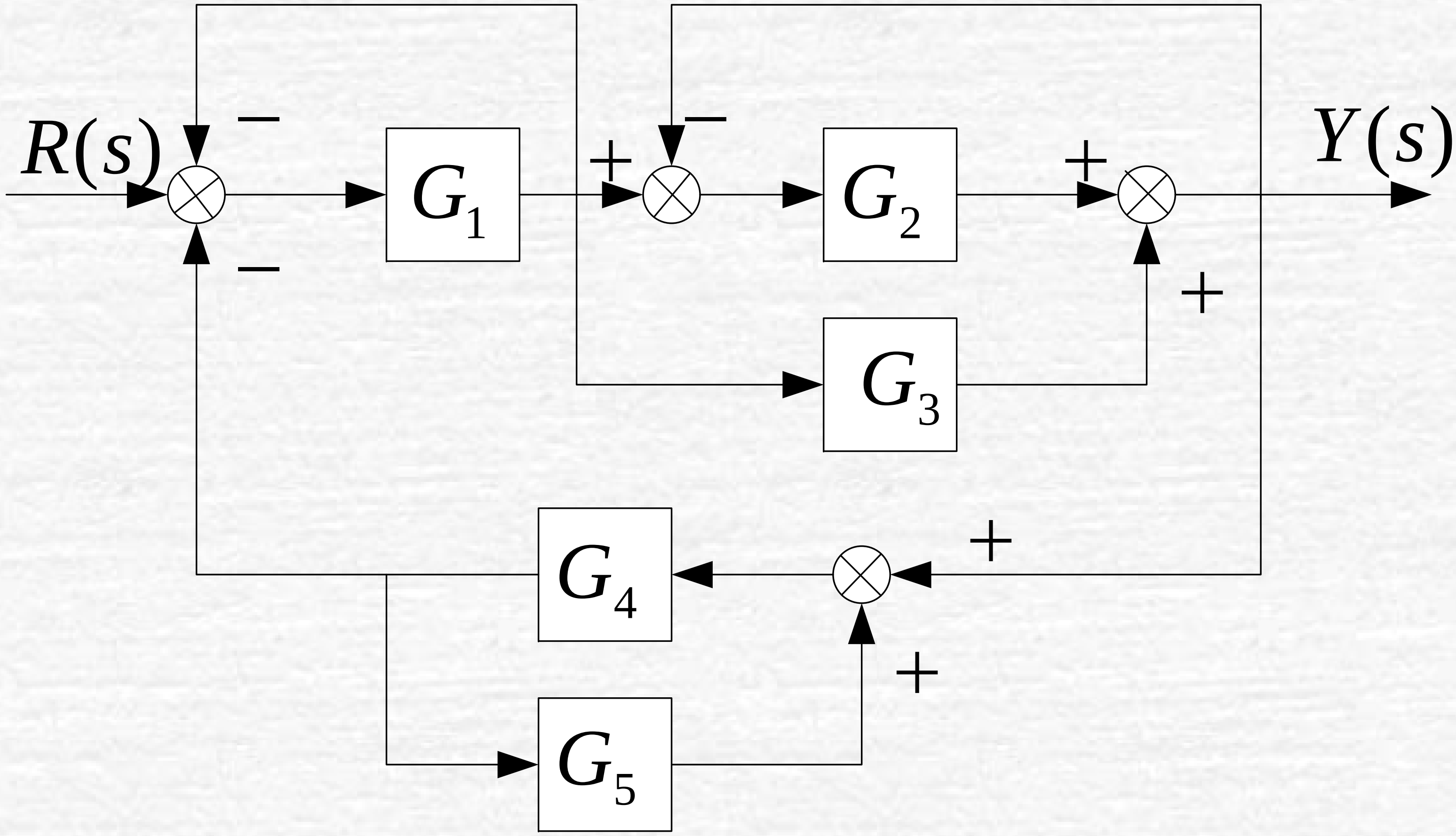

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

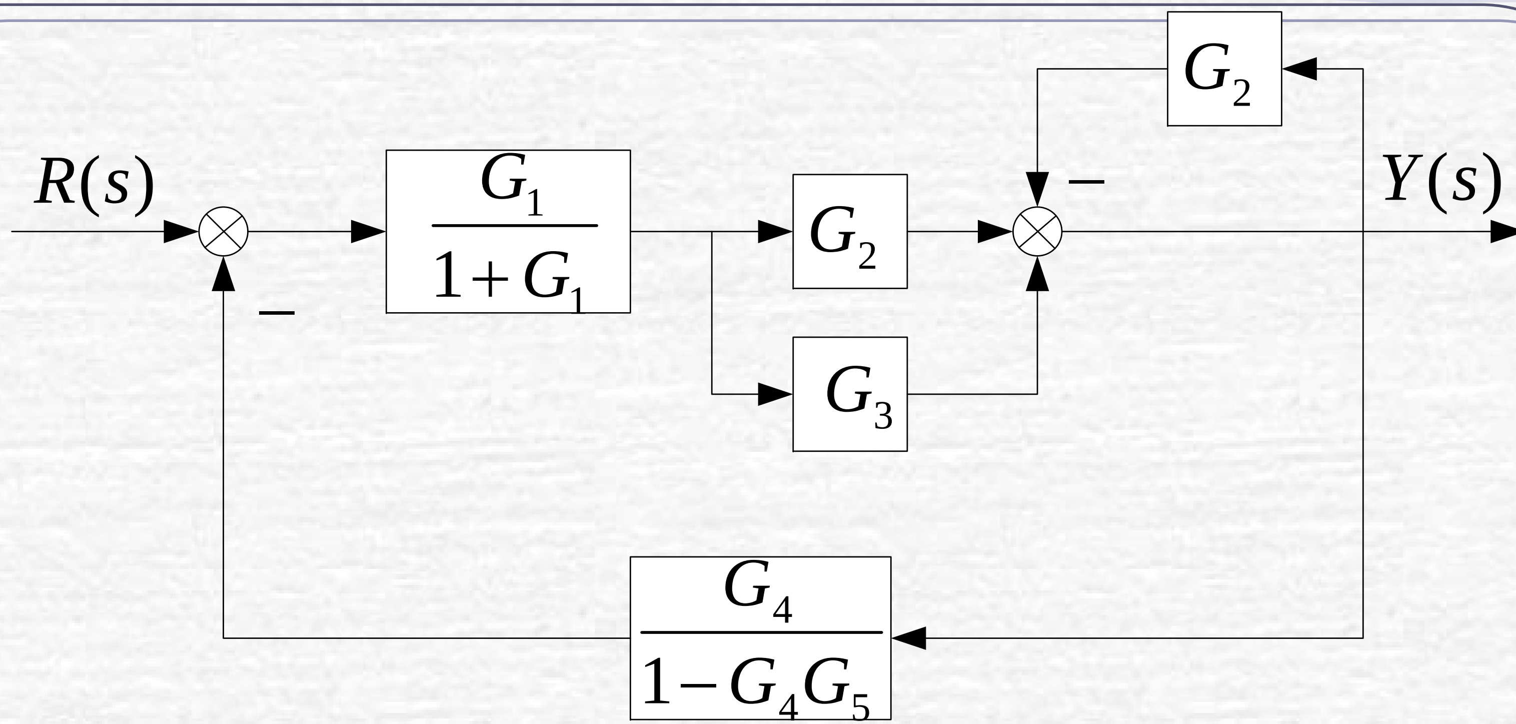
例2:

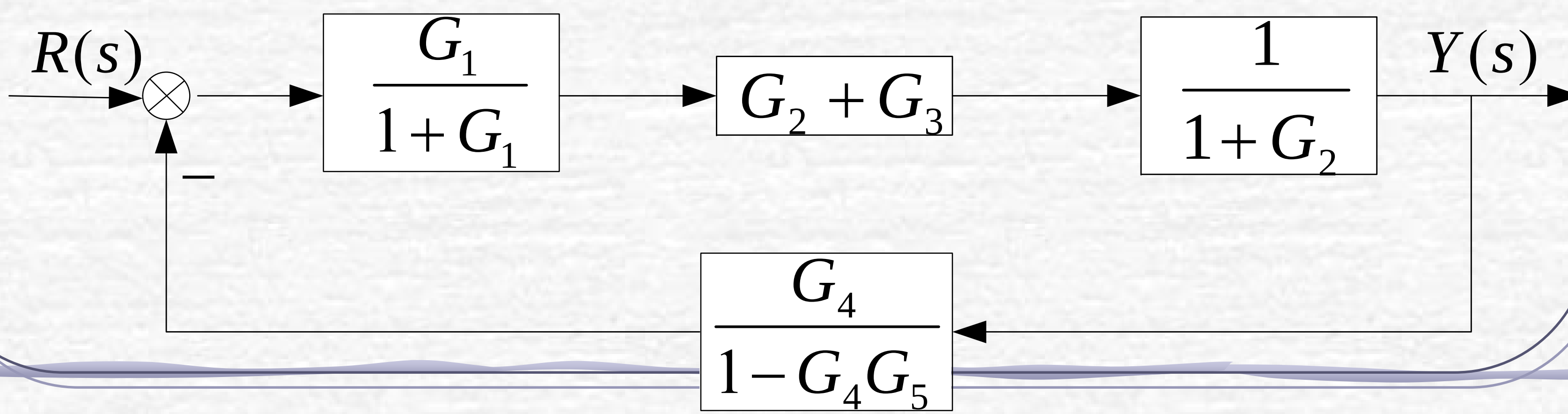



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_2G_3H_3+G_3G_4H_4+G_1G_2G_3H_2-G_1G_2G_3G_4H_1}$$

例3：




R(s)
G1 / (1+G1)
G2
G3
G2
Y(s)
G4 / (1−G4G5)
−
−
−


R(s)
G1 / (1+G1)
G2 + G3
1 / (1+G2)
Y(s)
G4 / (1−G4G5)
−

# 四、 信号流图和梅逊公式

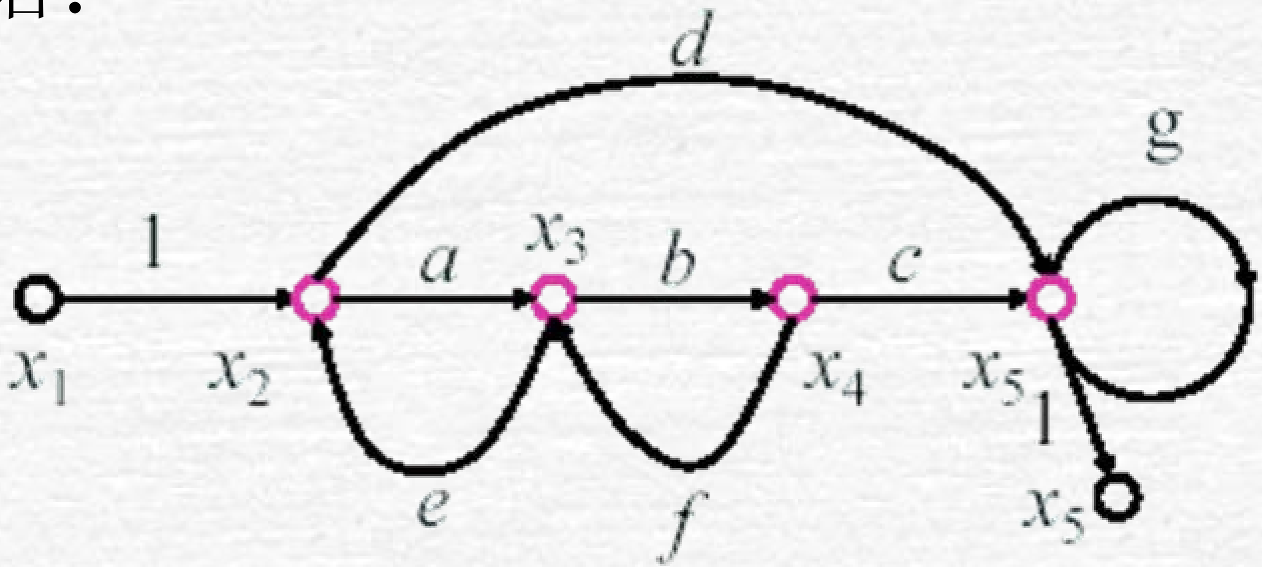
- 信号流图起源于梅逊（S. J. MASON）利用图示法来描述一个或一组线性代数方程式，是由节点和支路组成的一种信号传递网络。

节点：表示方程式中的变量或信号，是所有进入该节点的信号的代数和，用“o”表示。

支路：连接两个节点的定向线段，信号在支路上沿箭头单向传递。

支路增益：表示方程式中两个变量的因果关系。

名词术语：




（1）源节点（输入节点）：只有输出没有输入，一般代表系统的输入变量。

（2）阱节点（输出节点）：只有输入没有输出，一般代表系统的输出变量。

（3）混合节点：既有输入又有输出的节点。

（4）前向通路：信号从输入节点到输出节点的传递中，每个节点只通过一次的通路。

前向通路总增益：前向通路上各支路增益的乘积，一般用$p_k$表示。

（5）回路：起点与终点在同一节点，且信号通过每一节点不多于一次的闭合通路。

回路增益：回路中所有支路增益的乘积，用$L_a$表示。

（6）不接触回路：回路之间没有公共节点。

梅逊公式：

$$P=\frac{\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k}{\Delta}$$

式中：$P$—系统总传递函数；

$n$—前向通路总数；

$P_k$—第$k$条前向通路的传递函数（通路增益）；

$\Delta$ —流图特征式；

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \cdots$$

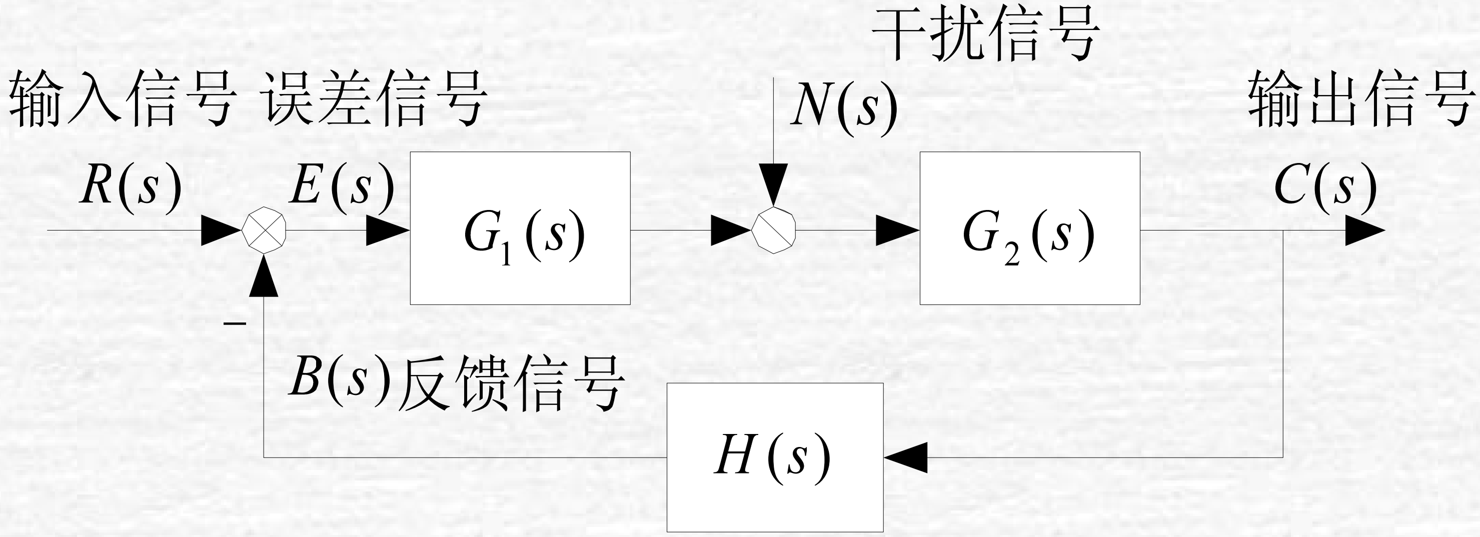
$\sum L_a$ —所有不同回路的传递函数之和；

$\sum L_b L_c$ —每两个互不接触回路传递函数乘积之和；

$\sum L_d L_e L_f$ —每三个互不接触回路传递函数乘积之和；

$\Delta_k$ —与第k条前向通路对应的余因子式，等于流图特征式中去掉与第k条前向通路接触的所有回路的回路增益后的余项式。

# 五、 闭环系统的传递函数



- 系统的开环传递函数（$N(s)=0$ ）

$$G_{开}(s)=\frac{B(s)}{E(s)}=G_1(s)G_2(s)H(s)$$

- 对输入量的闭环传递函数（ $N(s)=0$ ）

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 对扰动量的闭环传递函数 （$R(s)=0$ ）

$$\Phi_N(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 系统的总输出：

$$C(s) = \Phi(s)R(s) + \Phi_N(s)N(s)$$

- 定义系统的误差：

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

- 由输入量引起的误差传递函数（$N(s)=0$）：

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 由扰动引起的误差传递函数 （$R(s)=0$ ）：

$$\Phi_{eN}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 系统的总误差：

$$E(s)=\Phi_e(s)R(s)+\Phi_{eN}(s)N(s)$$

# 2-5 数学模型的实验测定法

- 实验测定法：对系统施加一定的激励（输入），测得它的输出，根据输入输出的数据（或曲线）结果，通过一定的数学处理方法，得到能反映系统输入、输出关系的数学模式。
- 特点：只能得到反映系统输入、输出关系的数学模型，不知道（不能反映）系统内部结构和系统中各物理量之间的关系。

- 根据加入的激励信号和结果的分析方法不同，实验测定法可分为：

（1）时域测定法：施加阶跃信号，绘制输出量的响应曲线；

（2）频域测定法：施加不同频率的正弦波，测出输入信号和输出信号之间的幅值比和相位差；

（3）统计相关法：施加某种随机信号，根据被控对象各参数的变化，采用统计相关法确定动态特性。